Chương 5

Hàm một biến số

Sau khi học chương này, người học sẽ có các kỹ năng và kiến thức sau:

1. Hiểu được một số ứng dụng của hàm số và các hàm thông dụng trong mô hình kinh tế đơn giản: hàm doanh thu, lợi nhuận, chi phí, hàm lợi ích, etc.
2. Sử dụng được đạo hàm để tính xấp xỉ giá trị cận biên của các hàm kinh tế, hệ số co giãn của các hàm cung và cầu, etc.
3. Xử lý được các bài toán tối ưu trong kinh tế.
4. Sử dụng được phần mềm máy tính hỗ trợ các bài toán phức tạp.

5.1 Hàm số một biến

Định nghĩa 5.1 *Một hàm số thực (real-valued function) của biến x với tập xác định (domain) D là một quy tắc mà mỗi một giá trị của $x \in D$ xác định duy nhất một giá trị của hàm số. Giá trị của hàm số f tại x thường được ký hiệu là $y = f(x)$.*

Ví dụ 5.1 *Giá của sản phẩm P là hàm của lượng cầu Q, biểu diễn là $P = 300 - 2Q$. Hệ số 2 ở đây có đơn vị là \$/sản phẩm.*
Khi $Q = 50$ (sản phẩm) thì giá của chúng là $P = 200$\$.

Ví dụ 5.2 *(Lương và tiền thưởng). Giả sử một nhân viên bán hàng nhận được mức lương theo hợp đồng kèm theo mức thưởng. Trong hợp đồng quy định rằng lương hàng tháng gồm có ba phần. Phần lương cơ bản là 7 triệu đồng, phần hoa hồng là 10% doanh số bán hàng, phần thưởng thêm của tháng là 5 triệu nếu nhân viên bán hàng có thể đạt doanh thu trên 200 triệu trong tháng đó.*
Gọi s là doanh thu bán hàng của nhân viên và p là tiền lương hàng tháng của nhân viên đó, ta có hàm số p theo s là:

$$p = \begin{cases} 7 + 0.1s, & s < 200 \\ 12 + 0.1s, & s \geq 200 \end{cases}$$

Ta thấy hàm số này là hàm đồng biến và gián đoạn tại điểm $s = 200$. Vẽ đồ thị biểu diễn hàm trên?
Giả sử nhân viên A đạt doanh số bán hàng trong tháng là 190 triệu, lương của A là $7 + 10\% \times 190 = 26$ triệu;
Nhân viên B đã đạt doanh số 190 triệu vào ngày 25 của tháng và rất muốn đạt mức 200 triệu để có thêm thưởng. B thông báo với các khách hàng tiềm năng của mình là nếu khách ký hợp đồng với giá trị tối thiểu là 10 triệu trước ngày cuối cùng của tháng thì B sẽ tặng khách quà tặng có giá trị tương đương 8% giá trị hợp đồng của khách. Một số khách hàng thích chương trình này và B đã có thêm doanh số vượt 10 triệu. Hỏi thu nhập của B khi đó ít nhất sẽ là bao nhiêu? So sánh với thu nhập của A thì thế nào?

Ví dụ 5.3 *Tổng sản phẩm quốc nội (Gross National Product) sau t năm được cho bởi mô hình dự báo sau:*

$$GNP = 80e^{0.04t}.$$

Sau bao nhiêu năm thì tổng sản phẩm quốc nội có giá trị là 100 tỷ $?

Ta cần giải phương trình sau: $100 = 80e^{0.04t} \Rightarrow 0.04t = ln(1.25)$. Ta thu được t xấp xỉ 5.58 năm.

5.2 Giới hạn của hàm số (limit of a function)

Định nghĩa 5.2 *(Giới hạn trái). Hàm số $f(x)$ có giới hạn trái bằng L tại điểm a nếu với mọi $\epsilon > 0$, nhỏ tùy ý, thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $a - \delta < x < a$ ta có $|f(x) - L| < \epsilon$, ký hiệu*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Ví dụ 5.4 *Xét hàm số*

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Ta có $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Định nghĩa 5.3 *(Giới hạn phải). Hàm số $f(x)$ có giới hạn phải bằng L tại điểm a nếu với mọi $\epsilon > 0$, nhỏ tùy ý, thì tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho khi $a < x < a + \delta$ ta có $|f(x) - L| < \epsilon$, ký hiệu*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Ví dụ 5.5 *Xét hàm số*

$$f(x) = \frac{|x|}{x}.$$

Ta có $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Định nghĩa 5.4 *Hàm số $f(x)$ gọi là có giới hạn tại điểm a nếu nó có giới hạn trái và giới hạn phải bằng nhau, tức là*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Ví dụ 5.6

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=1/4.$$

5.3 Đạo hàm

Định nghĩa 5.5 . *Cho hàm số $f : D \to R$. Hàm f được gọi là có đạo hàm tại điểm x_0 nếu tồn tại giới hạn hữu hạn*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(\textit{tương tự, }\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}).$$

Giá trị giới hạn đó gọi là đạo hàm của hàm f tại x_0, ký hiệu là $f'(x_0)$.

5.3.1 Đạo hàm của một số hàm sơ cấp

- $C' = 0$; $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(\alpha \neq 0)$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$; $\log_a(x)' = \frac{1}{x\ln(a)}$
- $(e^x)' = e^x$; $\log(x)' = \frac{1}{x}$
- $\sin(x)' = cos(x)$; $\cos(x)' = -\sin(x)$
- $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)}$; $(cotan(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$
- $arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $arctan(x)' = \frac{1}{1+x^2}$; $(arccotan(x))' = -\frac{1}{1+x^2}$

5.3.2 Quy tắc tính đạo hàm

- Đạo hàm của hàm tổng, hiệu $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- Đạo hàm của hàm tích $(uv)' = u'v + uv'$
- Đạo hàm hàm thương
$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$
- Đạo hàm hàm hợp: cho hàm $y = f(u)$ và $u = g(x)$ nếu tồn tại đạo hàm $y'(u), u'(x)$ thì
$$(f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$$
- Đạo hàm hàm ẩn cho ở dạng tham số: cho $y(x)$ xác định bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)(t \in D, x'(t) \neq 0, \forall t \in D)$. Khi đó:
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)};\quad y''(x) = \frac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}.$$

5.4 Các ứng dụng của đạo hàm trong kinh tế

Ký hiệu của một số biến và hàm thường gặp trong kinh tế:

- Giá (price): p hoặc P;
- Lao động (Labor): L;
- Vốn (Capital): K;
- Hàm lợi ích (Utility): U;
- Chi phí (Total Cost): TC;
- Doanh thu (Total Revenue): TR;
- Lợi nhuận (Profit) $\pi = TR - TC$.

5.4.1 Giá trị cận biên (marginal value)

Trong kinh tế học, lượng thay đổi của hàm $y = y(x)$ tại x_0 khi x tăng lên một đơn vị gọi là giá trị cận biên (marginal value). Ta ký hiệu là $My(x_0)$. Coi sự thay đổi của x là khá nhỏ, ta có xấp xỉ sau đây:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+1) - f(x_0)}{x_0 + 1 - x_0} = f(x_0+1) - f(x_0).$$

Trong thực hành, đôi khi ta viết dấu bằng thay cho dấu xấp xỉ.

Ví dụ 5.7 *Hàm của giá theo số lượng cầu là $P = 100 - 2Q$. Tính doanh thu cận biên, nếu hiện tại lượng cầu $Q = 15$ sản phẩm?*

Giải: Hàm doanh thu là $R = PQ = (100 - 2Q)Q$. Với $Q = 15$ ta có:

$$MR \approx (R)' = 100 - 4Q = 100 - 4 \cdot 15 = 40.$$

5.4.2 Quy luật lợi ích cận biên giảm dần

Các hàm biểu diễn lợi ích (thu nhập, doanh thu, lợi nhuận ...) đều tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần.

Ví dụ 5.8 *Bạn rất thích ăn kẹo sô cô la. Hàm "lợi ích" của bạn sẽ tăng khi bạn được ăn kẹo. Ăn chiếc đầu, bạn thấy rất tuyệt! Thêm một chiếc, vẫn rất ngon (lợi ích cận biên còn cao)! Thêm chiếc nữa, cảm giác ngon miệng có giảm đi chút ít. Nếu thêm chiếc nữa, rồi chiếc nữa, thì lợi ích cận biên sẽ ra sao?*

Lợi ích cận biên sẽ luôn giảm dần. Dưới góc nhìn của hàm số, hàm biểu diễn lợi ích là các hàm có đạo hàm cấp 1 giảm dần, tức là đạo hàm cấp 2 âm.

5.4.3 Hệ số co giãn - elasticity

Giả sử rằng một loại xe hơi tuần trước có giá 500 triệu và một loại điện thoại di động có giá 5 triệu. Tuần này chiếc xe hơi giảm 10 triệu, còn điện thoại giảm 1 triệu.
a. Thực chất xe hơi hay điện thoại đã có biến động về giá lớn hơn, xét tương đối với giá trị của sản phẩm?
b. Phản ứng của người tiêu dùng sẽ như thế nào? Làm sao để so sánh sự thay đổi tương đối về lượng cầu với sự thay đổi tương đối của giá sản phẩm?

Trong thực tiễn, ta sử dụng khái niệm hệ số co giãn để xem xét sự thay đổi tương đối của biến y(x)(ví dụ cung hoặc cầu) so với biến x (ví dụ như giá cả).

Định nghĩa 5.6 *Hệ số co giãn của y(x) theo biến x:*

$$\epsilon_{yx} \approx \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}.$$

Hệ số co giãn tương ứng với một điểm x_0: Khi x tăng từ mức $x = x_0$ lên 1% (hay một khoảng đủ nhỏ), ta có:

$$\epsilon_{yx}(x_0) \approx y'(x_0)\frac{x}{y}.$$

Ví dụ 5.9 *Giả sử giá rượu bia tăng lên 5% làm lượng cầu giảm đi 3%. Vậy hệ số co giãn của cầu theo giá là bao nhiêu?*

Hệ số co giãn của cầu theo giá là: -3% / (5%) = -0.6.

Ví dụ 5.10 *(Hệ số co giãn tại một điểm). Hàm cầu của một loại hàng hóa là*

$$Q = \frac{2000}{P^2}.$$

Tính hệ số co giãn của cầu theo giá tại $P = 5\$$. Ước lượng tỷ lệ thay đổi về cầu khi giá tăng 2%.

Giải. Tại $P = 5$ ta có $Q = 80$. Hệ số co giãn của cầu theo giá tại $P = 5$ là:

$$Q'(P)P/Q = -4000 \times 5^{-3} \times 5/80 = -2.$$

Khi giá từ 5$ tăng khoảng 2% thì cầu sẽ giảm khoảng 4%.

Chú ý 5.1 *Nếu*

- $|\epsilon| > 1$ *thì ta nói co giãn mạnh;*
- $|\epsilon| < 1$ *là co giãn yếu;*
- $|\epsilon| = 1$ *thì ta có co giãn đơn vị hay đẳng co.*

Trong trường hợp bài toán trên là co giãn mạnh vì $|-2| = 2 > 1$.

5.5 Bài toán tối ưu của hàm một biến số (optimization of one-variable function)

Định nghĩa 5.7 *Hàm $f(x)$ được gọi là có cực đại toàn cục tại x^* nếu*

$$f(x^*) \geq f(x), \quad \forall x.$$

$f(x)$ được gọi là có cực đại địa phương tại x_0 nếu tồn tại $\epsilon > 0$ rất nhỏ.

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon.$$

Định nghĩa 5.8 *Hàm $f(x)$ được gọi là có cực tiểu toàn cục tại x^* nếu*

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x.$$

$f(x)$ được gọi là có cực tiểu địa phương tại x_0 nếu tồn tại $\epsilon > 0$ rất nhỏ,

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x_0 - \epsilon \leq x \leq x_0 + \epsilon.$$

Chú ý 5.2 *Cho hàm số $f(x)$. Để tìm cực trị ta thực hiện như sau:*
Bước 1: Tìm các điểm tới hạn x_0, tức là $f'(x_0) = 0$ hoặc điểm x_0 mà tại đó không tồn tại đạo hàm.
Bước 2: Xét bảng biến thiên:

- *Nếu qua x_0 hàm f' đổi dấu từ âm sang dương thì hàm số f có cực tiểu*
- *Nếu qua x_0 hàm f' đổi dấu từ dương sang âm thì hàm số f có cực đại*
- *Nếu tại x_0 hàm f' không đổi dấu thì hàm f không có cực trị tại x_0.*

Để thay thế bước 2 ta có thể xét dấu của đạo hàm cấp 2:

- *Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) < 0$ thì hàm số $f(x)$ có cực đại tại x_0,*
- *Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f''(x_0) > 0$ thì hàm số $f(x)$ có cực tiểu tại x_0.*

Nếu cần tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a, b]$ thì ta so sánh hàm số tại điểm cực trị với các giá trị của hàm số tại các điểm a, b.

Ví dụ 5.11 *Xét quan hệ giữa nhà xuất bản và tác giả sách. Giả sử hàm giá theo cầu là $p = 100 - x$, hàm doanh thu của nhà xuất bản là $R = px = (100 - x)x$. Hàm chi phí là $C = 25x$. Giả sử tất cả sách in ra được bán hết và nhà xuất bản sẽ trả cho tác giả 10% phí bản quyền.*
Khi đó thu nhập của tác giả sách là:

$$y(x) = 0.1px = 0.1(100x - x^2).$$

Còn lợi nhuận của nhà xuất bản là:

$$\pi(x) = R(x) - C(x) - y(x) = 65x - 0.9x^2.$$

a. Tác giả muốn đặt ra một cái giá và lượng sách cần in để sao cho thu nhập anh ta đạt cực đại. Giá đó là bao nhiêu và cần in bao nhiêu bản?
b. Phía nhà xuất bản cũng muốn có lợi nhuận tối đa, vậy giá họ muốn đưa ra là bao nhiêu và cần in khoảng bao nhiêu cuốn sách?

Giải. Ta có $y'(x_A) = 0 \Rightarrow x_A = 50$. Do đó giá sách tác giả mong muốn sẽ là:

$$p_A = 100 - x_A = 50\$.$$

Đối với nhà xuất bản thì họ cũng muốn đạt lợi nhuận tối đa, do đó ta có lượng sách mà nhà xuất bản muốn in sẽ xấp xỉ bằng:

$$\pi'(x^B) = 65 - 1.8x^B = 0 \Rightarrow x^B \approx 36.$$

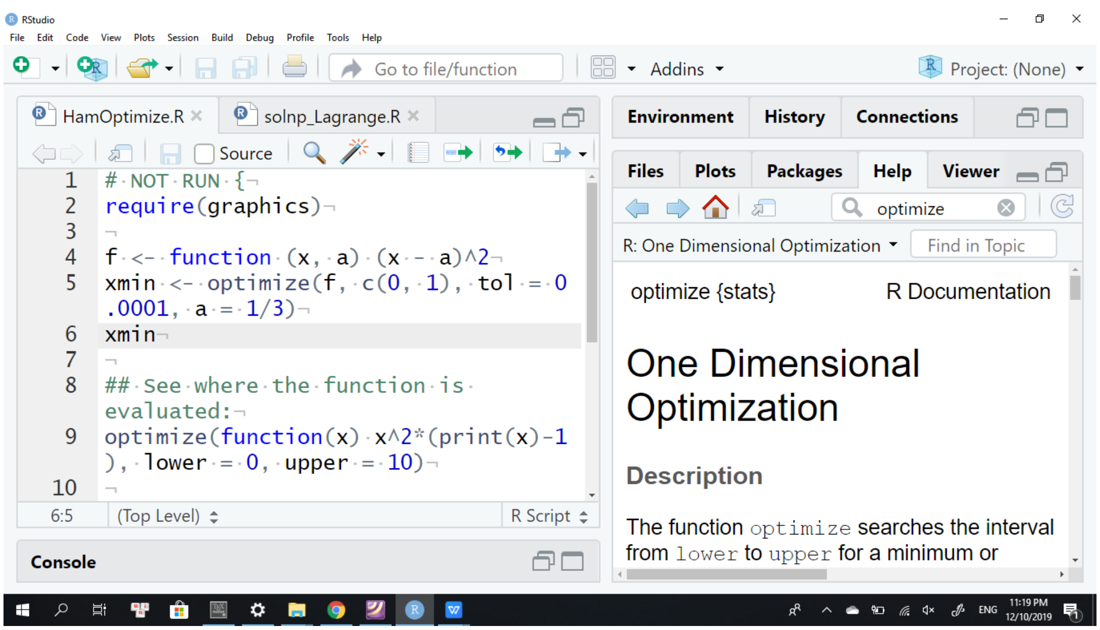
Giá tương ứng xấp xỉ $p^B = 64\$$.
So sánh hai kết quả ta thấy rằng nhà xuất bản muốn đưa ra giá bán sách cao hơn và in ít bản hơn tác giả sách mong muốn.

5.6 Thực hành lập trình

Trong chương trước ta đã biết dùng Excel để giải bài toán quy hoạch tuyến tính. Với bài toán phi tuyến mức độ đơn giản, Excel hỗ trợ xử lý tương đối hiệu quả: ví dụ chạy trên Excel

Trong phần này ta sẽ thử dùng ngôn ngữ R để giải quyết bài toán tối ưu ở trên.

1. Cài đặt R trước rồi tới Rstudio, file cài có ở trên web: bấm vào đây
2. Sau đó khởi động Rstudio để bắt đầu lập trình trên R: bấm vào đây.



Hình 5.1: Tối ưu một biến với hàm optimize() trên R.

5.7 Một số bài tập và thực hành cuối chương 5

1. (Tiếng Anh học thuật và thực hành lập trình). Đọc hiểu phần hướng dẫn thực hành và chạy thử hàm optimize():
https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.1/topics/optimize.

2. (Bài tập nhóm). Lập trình giải bài một số bài tập cuối chương Differentiation trong sách "Mathematics for economics and business", Ian Jacques[1]. Mỗi nhóm làm một hoặc hai bài tương ứng với các nội dung ứng dụng khác nhau, giải thích phần lập trình qua một bài trình bày ngắn để nói về kết quả nhóm làm được.

3. Hàm tổng doanh thu là $TR = 50Q - 3Q^2$ và hàm tổng chi phí là $TC = 20 + 2Q$. TÌm hàm lợi nhuận biên và tính giá trị lợi nhuận biên tại $Q = 3$. Nêu ý nghĩa của kết quả.

4. Hàm cầu của một loại hàng hóa là $P = 95 - Q^2 - 4Q$. Tính hệ số co giãn của cầu Q theo giá P, khi giá $P = 50(\$)$? Nêu ý nghĩa của kết quả tìm được và nhận xét sự co giãn ở đây là co giãn mạnh hay yếu, hay đẳng co?

5. Hàm doanh thu cận biên là $MR = 36 - 2Q$ và hàm chi phí cận biên là $MC = 3(\$)$. Biết chi phí cố định là 20($), tìm lợi nhuận tối ưu?

[1] `http://93.174.95.29/_ads/96A8076441FD5FA8966D6B303EFE4497`

Chương 6

Hàm nhiều biến (function of multi-variables)

Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Hiểu được một số ứng dụng của hàm nhiều biến trong thực tế, ví dụ hàm thuần nhất và bài toán quy mô sản xuất.
- Sử dụng được đạo hàm riêng để phân tích giá trị biên, tính xấp xỉ hệ số co giãn của các hàm kinh tế.
- Giải được bài toán tối ưu không điều kiện và tối ưu có điều kiện trong kinh tế, ví dụ bài toán liên quan tới tối ưu hóa lợi nhuận, bài toán lượng cầu Marshall, lượng cầu Hick.
- Dùng được phần mềm hỗ trợ giải bài toán phức tạp.

6.1 Hàm nhiều biến

Định nghĩa 6.1 *Hàm f của hai biến số x, y trên tập xác định D là một quy tắc mỗi giá trị của $x, y \in D$ thu được một giá trị $z = f(x, y)$. Các biến x, y là biến độc lập và z là biến phụ thuộc.*

Ví dụ 6.1 *R. Frisch and T. Haavelmo đã đưa ra mô hình tiêu thụ sữa của các hộ gia đình như sau:*

$$z = A\frac{m^{2.08}}{p^{1.5}}, \quad A > 0$$

trong đó z là mức tiêu thụ sữa, p là giá sữa, m là mức thu nhập của hộ gia đình.

Ví dụ 6.2 *Hàm hai biến thường xuất hiện nhiều trong kinh tế, chẳng hạn như hàm Cobb-Douglas về năng xuất dựa trên vốn sở hữu và lao động. Mô hình tổng quát như sau:*

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta}.$$

Mở rộng định nghĩa của hàm hai biến ta có hàm của n biến số $x_1, x_2, ..., x_n$, ký hiệu $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Định nghĩa 6.2 *Hàm thực f là hàm thuần nhất bậc s nếu:* $f(tX) = t^s f(X)$.

Hàm Cobb-Douglas nêu trên là hàm thuần nhất. Thông thường trong bài toán quy mô sản xuất ta xét một hàm thuần nhất như trên và xét t > 1. Giả sử hàm sản xuất là thuần nhất bậc s. Ta có

- $s > 1$: hiệu quả sản xuất tăng theo quy mô,
- $s = 1$: hiệu quả sản xuất không đổi theo quy mô,
- $s < 1$: hiệu quả sản xuất giảm theo quy mô.

6.2 Đạo hàm của hàm hai biến số

Xét hàm số $z = f(x, y)$. Ta muốn biết z thay đổi thế nào nếu ta thay đổi các giá trị của x, y. Nếu ta cố định biến y, tức là coi y như là hằng số thì khi đó ta có đạo hàm của hàm z theo biến x. Nếu cố định biến x thì ta có đạo hàm của z theo biến y.
Các đạo hàm của z theo các biến x, y như vậy được gọi là các đạo hàm riêng, ký hiệu là $\frac{\partial z}{\partial x}$ và $\frac{\partial z}{\partial y}$ hoặc z'_x, z'_y.

Về mặt toán học ta có định nghĩa của các đạo hàm riêng như sau.

Định nghĩa 6.3 *Cho hàm $z = f(x, y)$ đạo hàm riêng của f theo các biến được xác định như sau*

$$f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$
$$f'_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k}$$

Đạo hàm riêng cấp 2 của hàm $z = f(x, y)$ theo các biến x, y, ký hiệu $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ hoặc $(f''_{11}, f''_{22}, f''_{12})$ được định nghĩa như sau:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Big).$$

Ma trận đạo hàm cấp 2 gọi là ma trận Hessian, luôn đối xứng. Dạng ma trận tổng quát:

$$H = \begin{pmatrix} f''_{11} & f''_{12} & ...f''_{1n} \\ f''_{21} & f''_{22} & ...f''_{2n} \\ ... & ... & ... \\ f''_{n1} & f''_{n2} & ...f''_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ 6.3 *Tìm các đạo hàm riêng cấp 1 và cấp 2 của hàm số*
a. $z = f(x, y) = x^3y + x^2y^2 + x + y^2$*;*
b. $z = g(m, p) = A\dfrac{m^{2.08}}{p^{1.5}}$.

6.3 Hàm biên và hệ số co giãn

Ví dụ 6.4 *Hàm sản lượng nông nghiệp* $y = f(K, L, T)$*, trong đó* K *là vốn,* L *là lao động và* T *là vùng sản xuất. Khi đó* $\frac{\partial Y}{\partial K}$ *xấp xỉ sản lượng biên theo vốn, nó cho ta biết tốc độ thay đổi của sản lượng theo sự thay đổi của vốn* K*. Ví dụ nếu* $\frac{\partial Y}{\partial K} = 5$ *thì khi tăng lượng vốn lên* h *đơn vị thì sản suất tăng thêm* $5h$ *đơn vị.*
Xét hàm sản xuất f *có dạng mô hình Cobb-Douglas*

$$y = f(K, L, T) = 2K^2L^3T^4.$$

a. *Tính hàm sản xuất biên và hệ số co giãn theo biến vốn, lao động và vùng sản xuất, biết* $K = K_0, L = L_0, T = T_0$.

b. *Ma trận Hessian các đạo hàm cấp 2 của hàm* f *là ma trận cấp mấy? Ma trận này có đối xứng không? (Gợi ý:* $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f^{''} x_i x_j$*).*

Ví dụ 6.5 *Nhu cầu tiền mặt* M *ở nước Mỹ trong giai đoạn 1929-1952 được ước lượng cho bởi hàm sau:* $M = 0.14Y + 76.03(r-2)^{-0.84}, \quad (r > 2)$*. Trong đó* Y *là thu nhập quốc gia,* r *là lãi suất (%). Hãy tìm biểu diễn của hàm biên, hệ số co giãn tại điểm* (Y_0, r_0) *cho trước và tính ma trận Hessian. (Gợi ý: Ma trân Hessian là ma trận vuông cấp 2).*

6.4 Cực trị hàm nhiều biến

Cho hàm $z = f(x, y)$, ta muốn tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của z. Ta giả sử rằng hàm f đạt cực đại tại điểm (x_0, y_0). Nếu ta cố định giá trị y tại y_0 thì hàm số $g(x) = f(x, y_0)$ sẽ có cực đại tại x_0, tương tự hàm $h(y) = f(x_0, y)$ đạt cực đại tại điểm y_0.

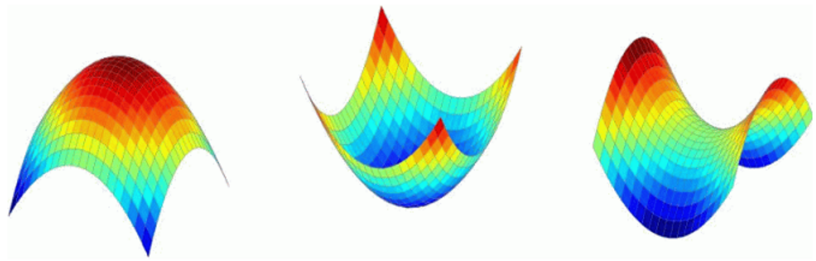
6.4.1 Cực trị tự do

Định lý 6.1 *(Điều kiện cần và đủ để hàm số đạt cực trị). Cho hàm hai biến* $z = f(x, y)$ *để hàm số có cực trị tại điểm* (x_0, y_0) *(cực đại, cực tiểu) thì điều kiện cần là hoặc* z *không có đạo hàm, hoặc có đạo hàm tại đó bằng 0, tức là:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Đặt $A = f^{''}_{11}(x_0, y_0); B =; f^{''}_{12}(x_0, y_0); C = f^{''}_{22}(x_0, y_0); \quad \Delta = AC - B^2$.

a) *Nếu* $A > 0$ *và* $\Delta > 0$ *thì hàm số đạt cực tiểu tại* (x_0, y_0) *.*



Hình 6.1: Ba trường hợp thông dụng của bài toán tối ưu: điểm max, min và yên ngựa.

b) Nếu $A < 0$ và $\Delta > 0$ thì hàm số đạt cực đại tại (x_0, y_0).

c) Nếu $\Delta < 0$ thì hàm số không có cực trị.

d) Nếu $\Delta = 0$ thì không có kết luận gì, phải khảo sát thêm.

Ví dụ 6.6 *Tìm cực trị hàm $f(x,y) = x^3 - x^2 - y^2 + 8$.*

Hướng dẫn. Tìm các điểm dừng

$$f_1'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 2x = 0; \quad f_2'(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y = 0$$

Suy ra $(x_0, y_0) = (0,0)$ và $(x_0, y_0) = (2/3, 0)$.
Ta có $f_{11}^{''}(x,y) = 6x - 2$; $f_{12}^{''}(x,y) = 0$; $f_{22}^{''}(x,y) = -2$.
Tại các điểm dừng ta xét dấu của Δ để suy ra điểm cực trị.

Ví dụ 6.7 *Một hãng sản suất hai loại mặt hàng A và B. Chi phí sản xuất (cost product function) hàng ngày x đơn vị mặt hàng A và y đơn vị B là*

$$C(x,y) = 0.04x^2 + 0.001xy + 0.001y^2 + 4x + 2y + 500.$$

Giả sử giá (mỗi đơn vị) tương ứng là 15\$ cho A và 9\$ cho B. Tìm mức sản xuất x, y sao cho hàm lợi nhuận $\pi(x,y) = 15x + 9y - C(x,y)$ đạt cực đại.

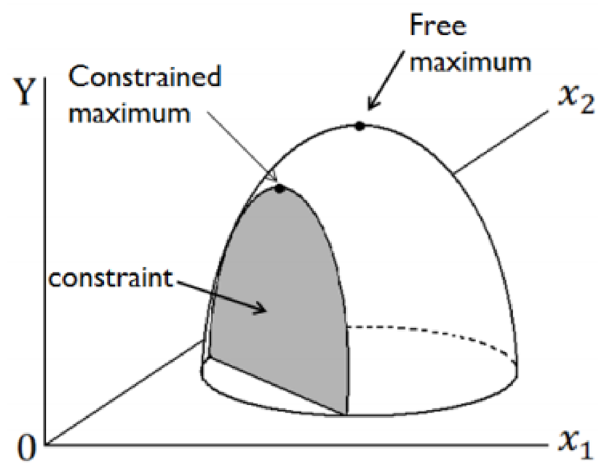
6.4.2 Cực trị có điều kiện (constrained optimization)

Tìm cực trị của hàm $f(x,y)$ với x, y có ràng buộc điều kiện $g(x,y) = c$. Để giải bài toán này ta có phương pháp Lagrange với các bước như sau.

(I) Viết hàm Lagrange

$$L(x,y) = f(x,y) + \lambda(g(x,y) - c)$$

trong đó λ là một hằng số.



Hình 6.2: Cực trị có điều kiện.

(II) Tính các đạo hàm riêng $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}$ của hàm L theo các biến x, y

(III) Giải hệ phương trình sau để tìm điểm dừng x_0, y_0, λ_0

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y) = f'_x(x,y) + \lambda g'_x(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y) = f'_y(x,y) + \lambda g'_y(x,y) = 0$$
$$g(x,y) = c$$

Giá trị λ_0 được gọi là nhân tử Lagrange.

(IV) Lập ma trận Hessian

$$H = \begin{pmatrix} L''_{\lambda\lambda} & L''_{\lambda x} & L''_{\lambda y} \\ L''_{x\lambda} & L''_{xx} & L''_{xy} \\ L''_{y\lambda} & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}$$

Tính định thức $|H|$ tại các điểm dừng (x_0, y_0, λ_0).

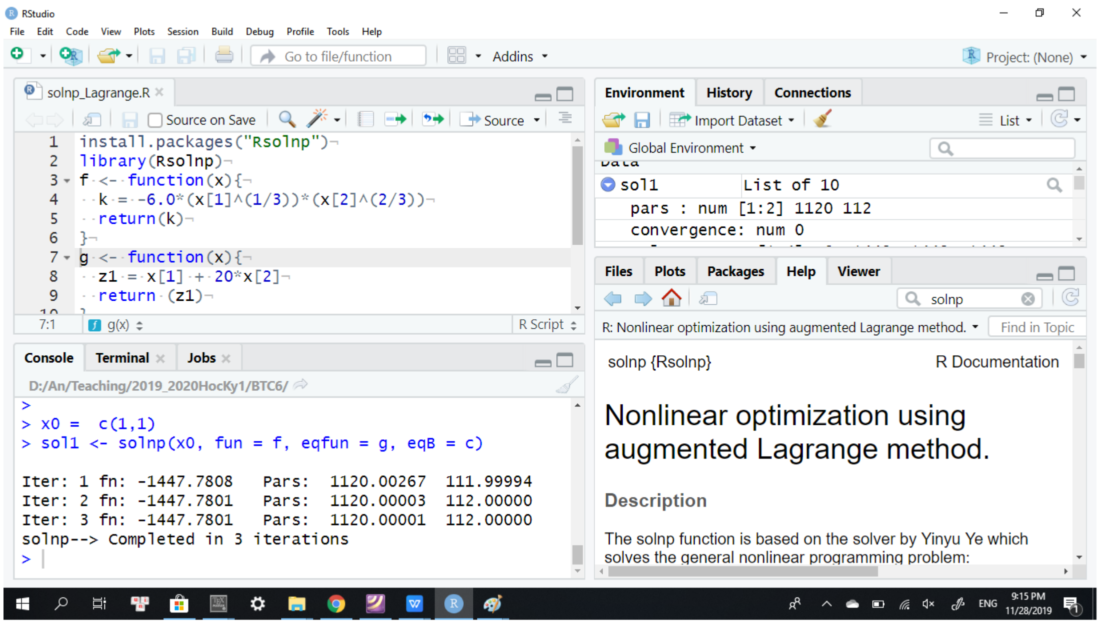
(i) Nếu định thức $|H| < 0$ thì hàm số đạt cực tiểu.

(ii) Nếu định thức $|H| > 0$ thì hàm số đạt cực đại.

6.5 Thực hành trên máy tính

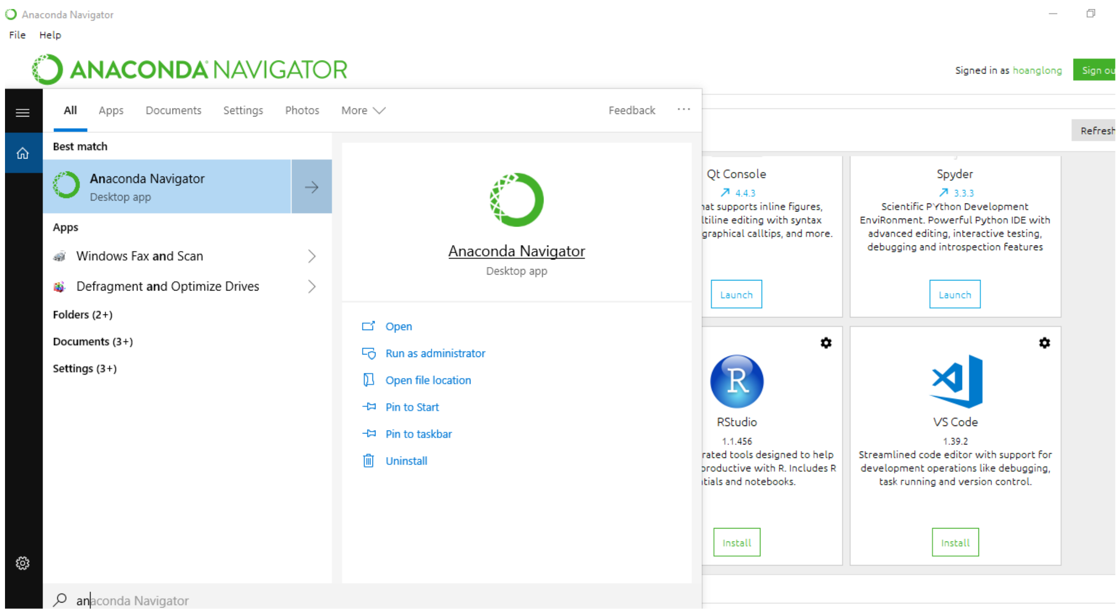
Trong phần trước ta giải bài toán tối ưu bằng excel và ngôn ngữ lập trình R. Sau khi cài đặt R và Rstudio, ta khởi động Rstudio và dùng một gói thư viện tối ưu để tìm lời giải.

Có nhiều gói thư viện tối ưu và hàm tương ứng để tham khảo, bấm ở đây. Trong hình **??** ta dùng hàm solnp() để giải bài toán tối ưu có điều kiện:

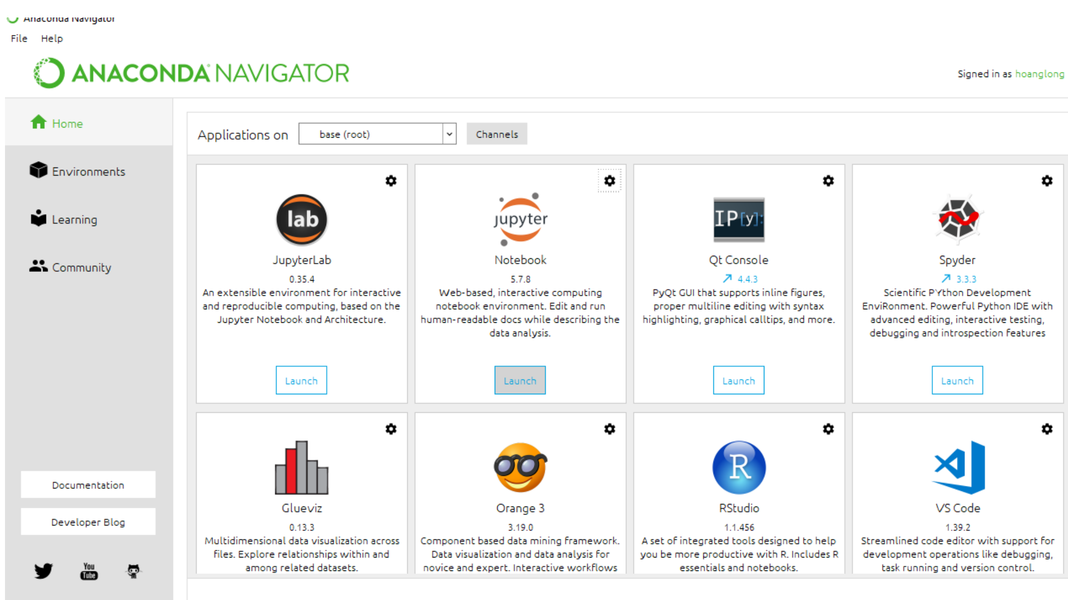


Hình 6.3: Giải bài toán tối ưu có điều kiện bằng hàm solnp() trong R.

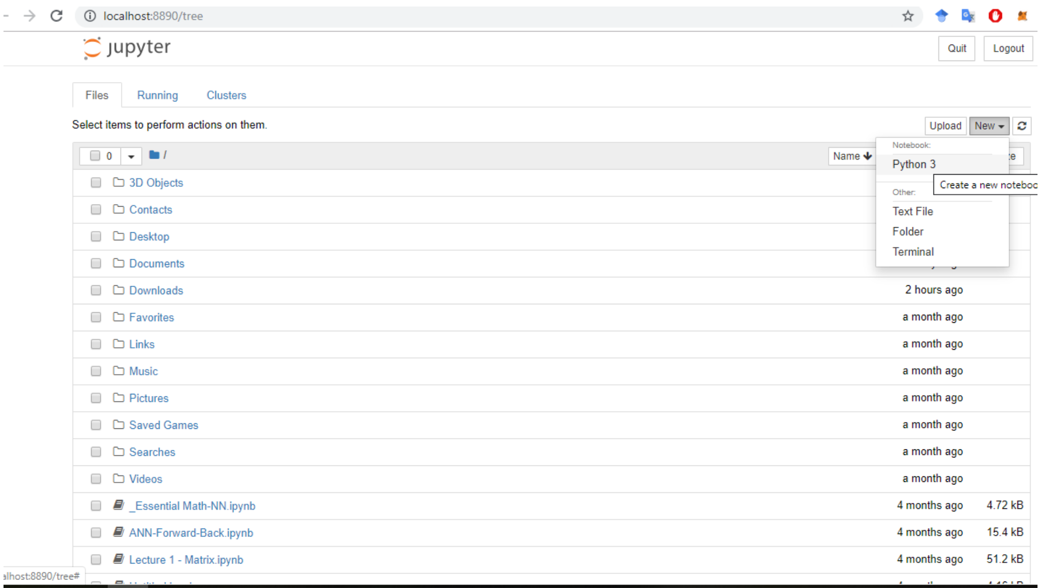
Phần tiếp theo ta sẽ thử nghiệm lập trình Python (một ngôn ngữ lập trình mở đang rất thịnh hành hiện nay). Ta sẽ cài đặt Anaconda hoặc dùng Python online.



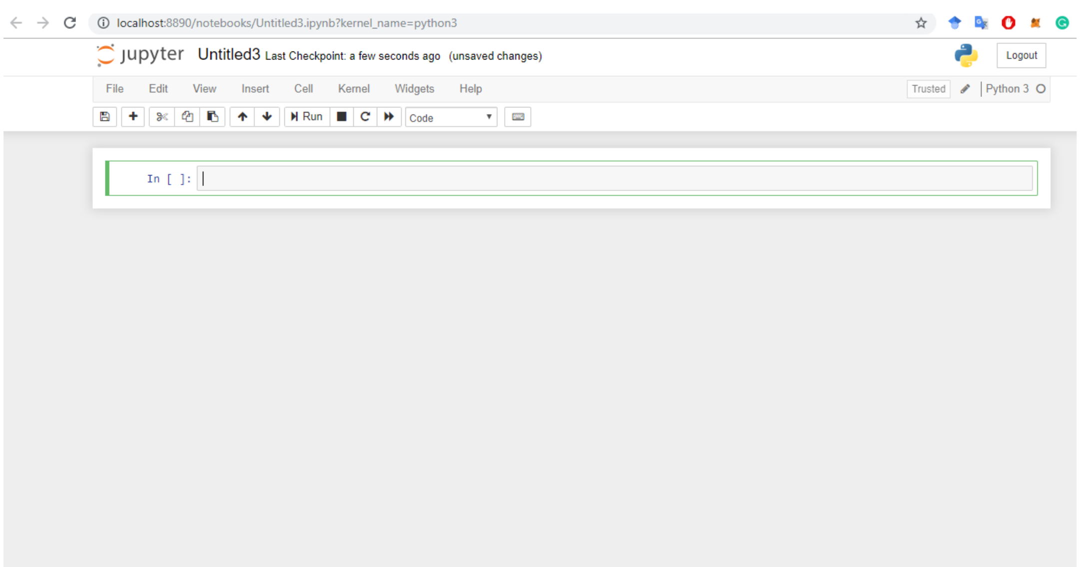
Hình 6.4: Cài đặt và khởi động Anacoda.



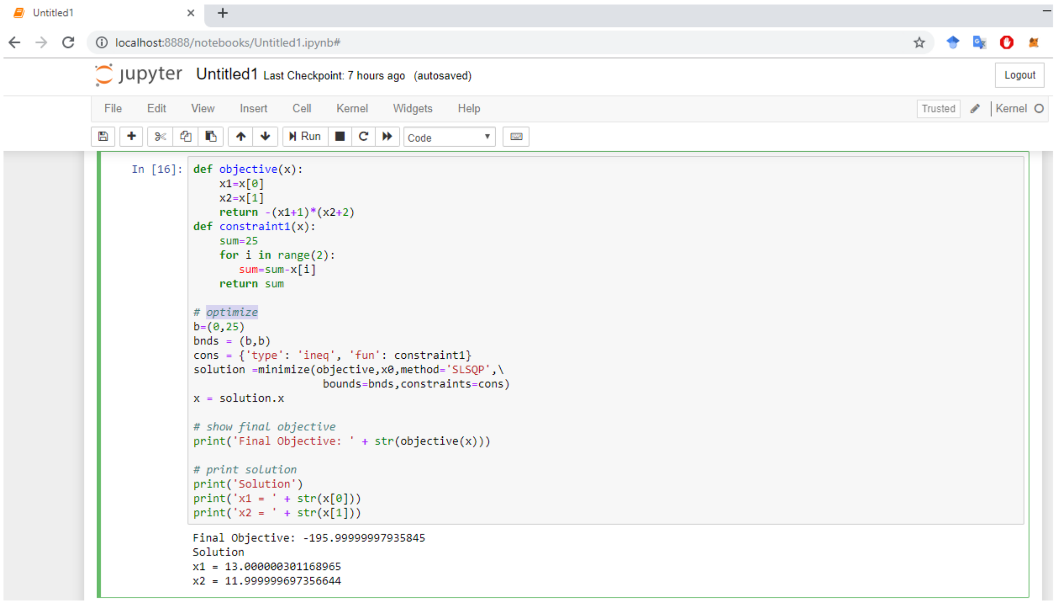
Hình 6.5: Cửa sổ Anacoda Nagigator.



Hình 6.6: Mở file Python nếu đã có sẵn hoặc mở một file mới.



Hình 6.7: Cửa sổ lập trình.



Hình 6.8: Chạy chương trình và đọc kết quả bài toán tối ưu.

6.6 Một số bài tập và thực hành cuối chương 6

1. (Tiếng Anh học thuật và thực hành lập trình). Xem video hướng dẫn thực hành và lập trình chạy ví dụ trong đó Video Python.

2. (Bài tập nhóm) Lập trình giải bài một số bài tập cuối chương Partial Differentiation trong sách "Mathematics for economics and business", Ian Jacques[1]. Mỗi nhóm làm một bài với nội dung ứng dụng khác nhau, giải thích các hàm đã dùng và kết quả qua một bài trình bày.

3. (Hàm thuần nhất và bài toán quy mô sản xuất). Cho hàm sản xuất của một doanh nghiệp là hàm Cobb Douglas $Q = Q(K, L) = AK^aL^b$, trong đó Q, K, L lần lượt là sản lượng (quantity), lượng vốn (capital) và lượng lao động (labour); A, a, b là các tham số dương. Đánh giá hiệu quả của quy mô sản xuất, biết rằng $a = 0.3$ và $b = 0.5$. Nếu doanh nghiệp muốn giảm 10% lượng nhân công L thì cần tăng lượng vốn lên bao nhiêu phần trăm để duy trì mức sản lượng hiện tại?

4. (Ứng dụng của đạo hàm riêng: hàm biên, hệ số co giãn). Doanh nghiệp có hàm sản xuất là $Q = K(L+4)$, giá sản phẩm trên thị trường là $P = 2(triu\O ng/snphm)$. Giá thuê một đơn vị vốn là 1 triệu đồng và giá thuê môt đơn vị lao động là 0.4 triệu đồng. Chi phí cố định ban đầu là $C_0 = 100$ triệu đồng. Xét tại vị trí $K = 200, L = 30$:

[1] http://93.174.95.29/_ads/96A8076441FD5FA8966D6B303EFE4497

a. Xác định hàm chi phí, chi phí cận biên và hệ số co giãn.

b. Xác định hàm tổng doanh thu, doanh thu cận biên và hệ số co giãn.

c. Xác định hàm lợi nhuận, lợi nhuận cận biên và hệ số co giãn.

5. (Bài toán tối ưu tự do). Một doanh nghiệp độc quyền sản xuất hai loại hàng hóa. Giả sử hàm cầu của chúng lần lượt là:

$$Q_1 = 990 = P_1 - P_2, \quad q_2 = 1390 - P_1 - 2P_2.$$

Hàm tổng chi phí là $TC = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$.

a. Tìm hàm lợi nhuận của doanh nghiệp?

b. Tìm sản lượng mỗi loại hàng để lợi nhuận đạt tối ưu? Tính giá tại thời điểm đó?

6. (Bài toán tối ưu có điều kiện). Một người muốn tìm số giờ làm việc mỗi tuần để tối ưu hóa hàm lợi ích $U = 4E^{0.5}F$, trong đó E là tiền lương nhận được mỗi tuần($) và F là số giờ họ không phải làm việc mỗi tuần (giờ). Biết rằng mỗi giờ làm việc họ được trả lương 20$ (sau khi đã trừ thuế).

a. Xác định hàm ràng buộc giữa E và F?

b. Người đó nên làm việc bao nhiêu giờ mỗi tuần để hàm lợi ích đạt tối ưu.

c. Nếu tiền lương mỗi giờ tăng lên thì người đó có nên tăng hay giảm số giờ làm việc hàng tuần để đat lợi ích tối đa?

Chương 7

Tích phân hàm một biến

Sau khi học xong chương này, người học có thể:

- Hiểu và có thể tìm được nguyên hàm, tích phân bất định, tích phân xác định của một số hàm kinh tế.

- Biết vận dụng tích phân để xử lý một số bài toán trong thực tiễn, cụ thể: xác định được hàm kinh tế khi biết hàm biên tương ứng (ví dụ hàm lợi nhuận, doanh thu, chi phí); tính được quỹ vốn khi biết hàm đầu tư; tìm được thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất.

- Có khái niệm sơ lược về tích phân suy rộng, ứng dụng của tích phân suy rộng trong thực tiễn.

7.1 Tích phân không xác định (nguyên hàm)

Định nghĩa 7.1 *Cho hàm số $f(x)$, hàm $F(x)$ được gọi là một nguyên hàm của hàm $f(x)$ nếu $f(x) = F'(x) = \frac{dF(x)}{d(x)}$. Ký hiệu*

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Chú ý 7.1 *Một số công thức tích phân bất định*

a.
$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,$$

b.
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, \quad (k \text{ là hằng số,})$$

và một số tích phân đơn giản

a.
$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \quad a \neq -1,$$

b.

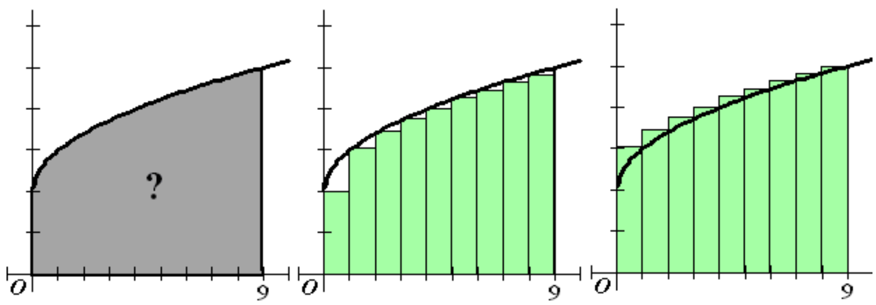
$$\int e^x dx = e^x + C,$$

c.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

7.2 Tích phân xác định (tích phân Riemann)

Ta đã biết một trong các bài toán xuất phát của tích phân xác định là để tính diện tích một hình thang cong, hay một hình phẳng có hình dạng tùy ý.



Hình 7.1: Tích phân xác định, nguồn: `http://www.hhofstede.nl/modules/riemann.htm`.

Định lý 7.1 *Nếu $f(x)$ là hàm liên tục trên $[a, b]$ và $F(x)$ là nguyên hàm của f thì ta có*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Định lý 7.2 *Nếu f là hàm liên tục (hoặc ít nhất là khả tích, nghĩa là có thể lấy tích phân) trên $[a, b]$. Với $\forall x \in [a, b]$ hàm số $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ có tính chất*

$$F'(x) = f(x).$$

Một số tính chất đơn giản của tích phân xác định

(i) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, với $a < b < c$,

(ii) $\int_a^a f(x)dx = 0$,

(iii) $\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$,

(iv) nếu hàm $f(x) < 0$ với mọi $x \in [a, c]$ thì $\int_a^c f(x)dx < 0$ và $|\int_a^c f(x)dx|$ là giá trị diện tích của miền giới hạn bởi hàm f trên $[a, c]$.

7.3 Các phương pháp tính tích phân

- Phương pháp tích phân từng phần

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$

- Phương pháp đổi biến

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Nhận xét: Máy tính cầm tay có thể tính các tích phân xác định thông thường.

7.4 Ứng dụng của tích phân trong kinh tế

Trong phần này, ta sẽ nói tới việc ứng dụng tích phân để xác định các hàm chi phí, doanh thu, lợi nhuận ... khi biết hàm biên tương ứng, xác định quỹ vốn khi biết hàm đầu tư, xác định thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất khi biết hàm cầu và hàm cung của sản phẩm.

7.4.1 Xác định các hàm kinh tế khi biết hàm biên tương ứng

Ta đã biết hàm biên chi phí MC, hàm biên doanh thu MR, hàm biên lợi nhuận $M\pi$ là xấp xỉ đạo hàm của hàm C, R, π đang xét. Vậy hàm C, R, π là tích phân của các hàm biên.

Ví dụ 7.1 *Hàm doanh thu cận biên là $MR = 360 - 0.5Q^2$, hàm chi phí biên là $MC = 120 + 0.1Q^2$. Chi phí cố định là $50(\$)$. Tính lợi nhuận tối đa trong trường hợp trên.*

Giải.
Hàm lợi nhuận là tích phân của hàm lợi nhuận biên, do đó:

$$\pi(Q) = \int (MR - MC)dQ = \int (240 - 0.6Q^2)dQ = 240Q - 0.2Q^3 + \pi_0.$$

Khi sản xuất bằng 0 tức là $Q = 0$ ta có doanh thu $R_0 = 0$, còn chi phí cố định là $C_0 = 50(\$)$ nên $\pi_0 = -50(\$)$. Để tìm lợi nhuận tối đa, ta cần tìm $Q \geq 0$ để $M\pi = \pi'_Q = 0$.
Từ đó suy ra $240 - 0.6Q^2 = 0 \rightarrow Q = 20$ (do $Q > 0$). Lợi nhuận tối đa đạt được khi $Q = 20$ là $\max \pi = 240 \times 20 - 0.2 \times 20^3 - 50 = 3150(\$)$..

7.4.2 Quỹ vốn và lượng đầu tư

Gọi $K(t)$ là quỹ vốn, $I(t)$ là lượng đầu tư tại thời điểm t. Khi đó $I(t)$ là biên tế của quỹ vốn $K(t)$. Ta có biểu thức:

$$K'(t) = I(t); \quad K(t) = \int_{t_0}^{t} I(\tau)d\tau + K_0$$

K_0 là quỹ vốn ban đầu tại thời điểm ban đầu $t = t_0$.

Ví dụ 7.2 *Lượng đầu tư của vào một doanh nghiệp tại thời điểm t là $I(t) = 30\sqrt{t}$ (triệu đồng). Đơn vị của t tính theo năm.*
a. Ban đầu quỹ vốn của doanh nghiệp là 100 triệu đồng. Xác định hàm quỹ vốn theo thời gian của doanh nghiệp?
b. Tính tổng vốn tăng thêm từ cuối năm thứ nhất tới cuối năm thứ tư?

Giải. Quỹ vốn của doanh nghiệp là

$$K(t) = \int_{t_0}^{t} 30\sqrt{\tau}d\tau + K_0.$$

a. Theo đề bài quỹ vốn ban đầu là 100 triệu đồng, tức là tại $t_0 = 0$ ta có $K_0 = 100$ (triệu đồng). Suy ra

$$K(t) = \int_{0}^{t} 30\sqrt{\tau}d\tau + 100 = 20t\sqrt{t} + 100 \text{ (triệu đồng).}$$

b. Tổng vốn tăng thêm từ cuối năm thứ nhất tới cuối năm thứ tư là:

$$K(4) - K(1) = (20 \times 4 \times \sqrt{4} + 100) - (20 \times 1 \times \sqrt{1} + 100) = 140 \text{ (triệu đồng).}$$

7.4.3 Thặng dư tiêu dùng

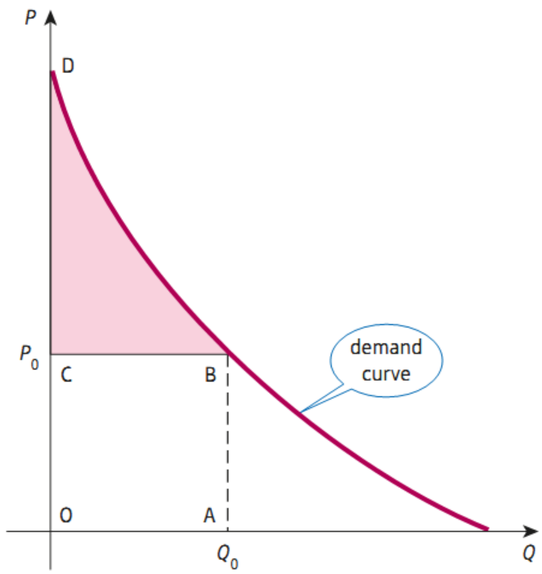
Tại thời điểm người tiêu dùng đồng ý mua sản phẩm với mức giá P_0, họ trả số tiền P_0 cho một đơn vị sản phẩm, tức là cho sản phẩm thứ Q_0. Như vậy với những sản phẩm trước đó, người tiêu dùng có thể đã đồng ý trả mức giá cao hơn để mua, xem đồ thị hàm cầu trong hình **??**.
Thặng dư tiêu dùng tương ứng với sự "hài lòng" (satisfaction) khi người tiêu dùng mua hàng, nó đo bằng diện tích phần tam giác cong BCD trong hình **??**. Theo ý nghĩa của tích phân xác định, khi ta xét tại điểm (Q_0, P_0) thì công thức tính thặng dư tiêu dùng là:

$$CS = \int_{0}^{Q_0} D(Q_d)dQ_d - P_0Q_0, \quad D(Q_d) \text{ là hàm cầu.}$$

Ví dụ 7.3 *Cho hàm cầu $P = 60 - 4Q$. Tìm thặng dư tiêu dùng biết $Q = 5$.*

Giải. Do ta đang xét $Q = 5$ nên $P = 40$. Thặng dư tiêu dùng khi đó là:

$$CS + \int_{0}^{5} (60 - 4Q)dQ - 5 \times 40 = 250 - 200 = 50.$$



Hình 7.2: Thặng dư tiêu dùng, nguồn: Ian Jacques, "Mathematics for economics and business".

Chú ý 7.2 *Trong thực hành người ta hay xét thặng dư tiêu dùng ở điểm cân bằng thị trường. Khi đó điểm* (Q_0, P_0) *trong công thức tính thặng dư tiêu dùng là điểm cân bằng thị trường.*

7.4.4 Thặng dư sản xuất

Thặng dư sản xuất (producer's surplus) tại (Q_0, P_0) đo độ chênh lệch của doanh thu thực tế với doanh số nhà sản xuất có thể đồng ý bán, xem hình **??**. Công thức tính:

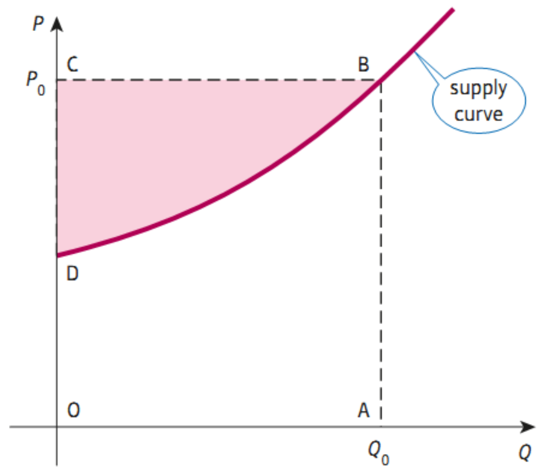
$$PS = P_0Q_0 - \int_0^{Q_0} S(Q_S)dQ_S, \quad S(Q_S) \text{ là hàm cung.}$$

Chú ý 7.3 *Trong thực tiễn, người ta hay xét thặng dư sản xuất tại thời điểm cân bằng thị trường cung và cầu, do đó giá trị* (Q_0, P_0) *là giá trị tại thời điểm cân bằng.*

Ví dụ 7.4 *Giả sử hàm cầu* $P(Q_D) = 50 - 0.1Q_D$ *và hàm cung* $P(Q_S) = 20 + 0.2Q_S$. *Thặng dư sản xuất tại điểm cân bằng là bao nhiêu?*

Hướng dẫn. Tại điểm cân bằng $Q = 100, P(Q) = 40$, giá trị của thặng dư sản xuất được tính qua công thức

$$100 \times 40 - \int_0^1 00(20 + 0.2Q)dQ = 1000.$$



Hình 7.3: Thặng dư sản xuất, nguồn: Ian Jacques, "Mathematics for economics and business".

7.5 Tích phân suy rộng

Trong tài liệu này ta chỉ giới thiệu tích phân suy rộng loại có cận là $+\infty$ hoặc $-\infty$. Tích phân suy rộng loại này có ứng dụng nhiều trong lý thuyết xác suất và thống kê. Phần này chúng ta không đi sâu vào xét tính hội tụ của tích phân suy rộng.

Định nghĩa 7.2 *Nếu tồn tại giới hạn bên phải hữu hạn thì ta đặt:*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{c\to+\infty} \int_b^c f(x)dx.$$

Chú ý 7.4 *Tính chất của tích phân suy rộng (với giả thiết các tích phân hội tụ)*

a. $\displaystyle\int_a^{\infty} [f(x)+g(x)]dx = \int_a^{\infty} f(x)dx + \int_a^{\infty} g(x)dx$

b. $\displaystyle\int_a^{\infty} kf(x)dx = k\int_a^{\infty} f(x)dx$ *(k là hằng số).*

Trường hợp cận dưới của tích phân là vô hạn ta có kết quả tương tự.

Ví dụ 7.5 *Tính tích phân (theo nguyên hàm)*

a.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx;$$

b.

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx.$$

Giải.

a.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^3} dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{c^{-2} - 1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

b.

$$\int_0^{+\infty} e^{-cx} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-cx} dx = \lim_{b \to +\infty} \frac{e^{-cb} - 1}{-c} = \frac{1}{c}.$$

7.6 Thực hành trên máy tính

Việc tính toán tích phân xác định của các hàm thông dụng có thể thực hiện trên máy tính cầm tay. Tuy nhiên với hàm phức tạp hoặc tích phân suy rộng, ta có thể cần tới các công cụ mạnh hơn. Bên cạnh việc lập trình với mã nguồn mở trên R và Python, ta cũng có một số các công cụ tích hợp sẵn trên web[1] để tham khảo, xem hình **??** và **??**.

7.7 Một số bài tập và thực hành cuối chương 7

1. (Thực hành phần mềm). Sử dụng máy tính cầm tay và trang web integral-calculator.com/ để tính một số tích phân bất định, tích phân xác định có cận ở vô cùng, tích phân xác định phức tạp

2. (Bài tập rèn luyện tiếng Anh học thuật, bài tập nhóm). Sử dụng kiến thức tích phân để giải một số bài tập ứng dụng cuối chương Integration và nghiên cứu vấn đề trữ lượng tài nguyên (ví dụ bài 7 trang 655) sách "Mathematics for economics and business"[2].

3. Dòng đầu tư của một doanh nghiệp là hàm $I(t) = 6000t^{0.5}(\$)$, với t tính theo năm. Tìm tổng lượng vốn gia tăng của doanh nghiệp từ cuối năm thứ nhất tới cuối năm thứ chín.

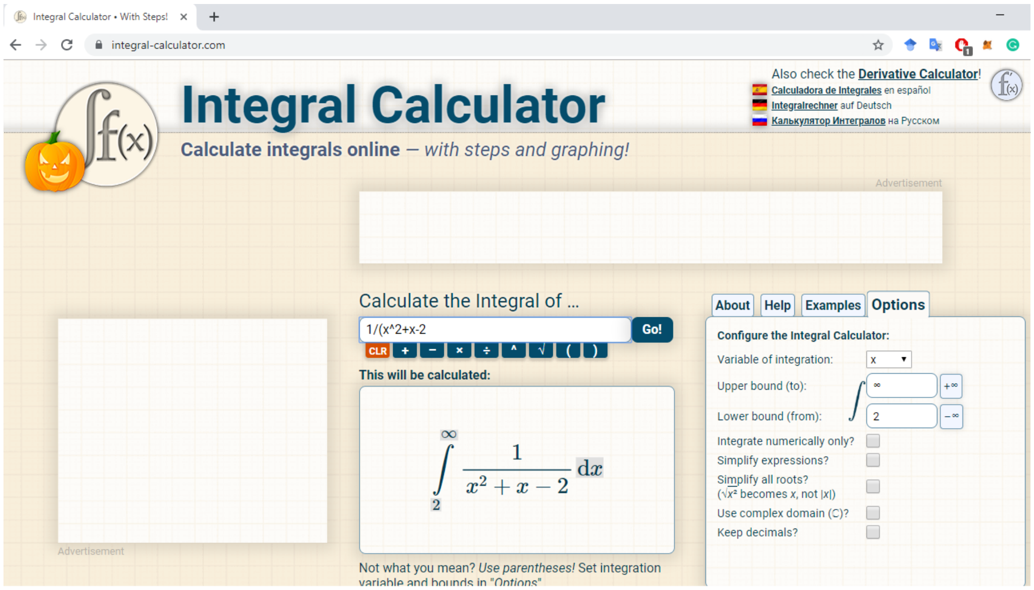
4. Tìm thặng dư tiêu dùng khi $P = 36(\$)$, biết hàm cầu là $P = 100 - Q^2$?

5. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất tại thời điểm cân bằng thị trường, biết $P = 38 - Q_D^2$, $P = 6 + Q_S^2$.

---

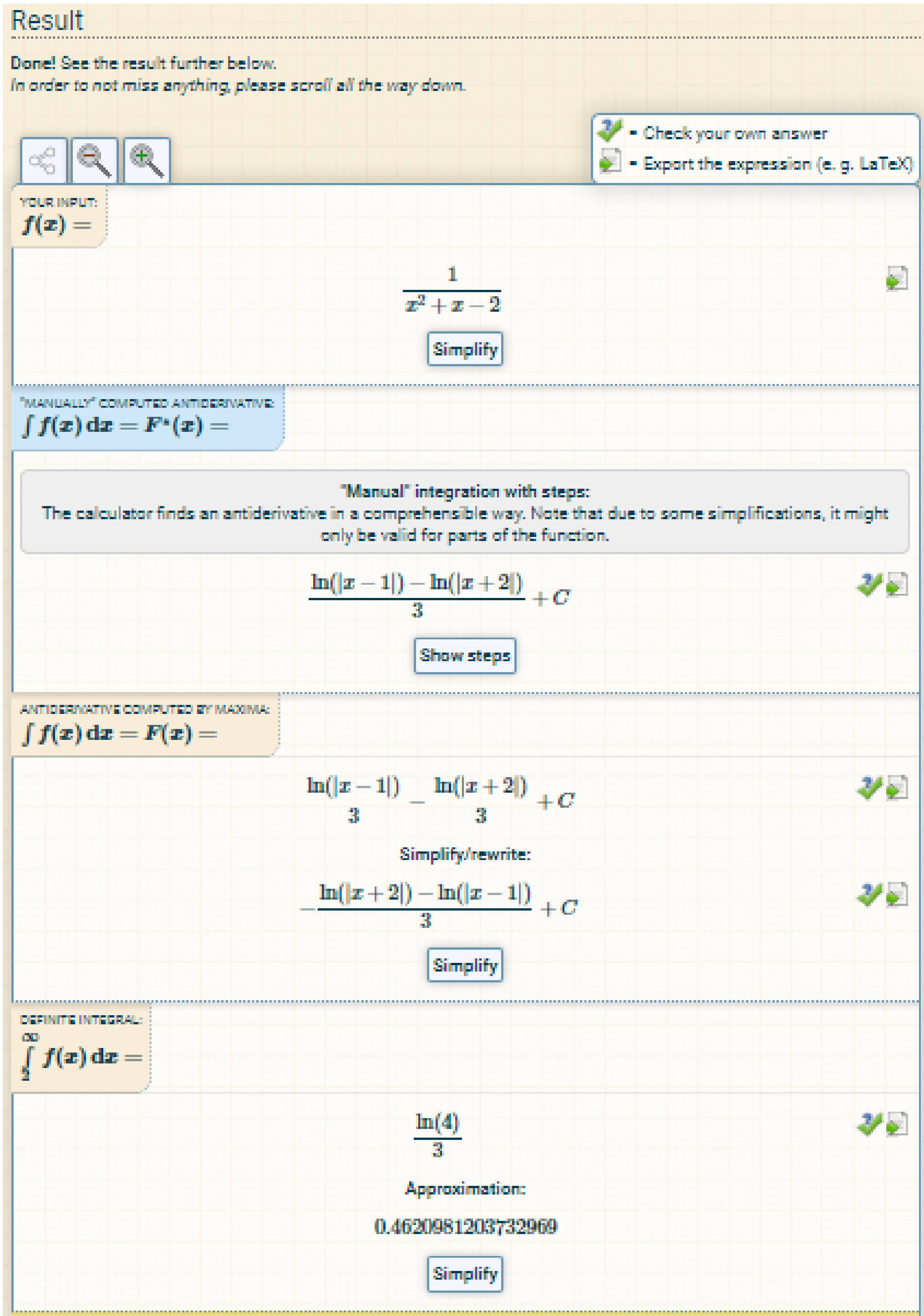
[1] `integral-calculator.com`

[2] `http://93.174.95.29/_ads/96A8076441FD5FA8966D6B303EFE4497`



Hình 7.4: Tính toán với tích phân, nguồn integral-calculator.com

6. Hàm biên của tổng tiêu dùng quốc gia là $MPC = 0.25 + Y^{-1/2}$. Khi không có thu nhập $(Y = 0)$, mức tiêu dùng tối thiểu là 10 (tỷ \$). Tìm hàm tiêu dùng theo thu nhập Y và tính mức tiêu dùng khi $Y = 16$ tỷ đô la.



Hình 7.5: Chi tiết tính toán với tích phân, nguồn integral-calculator.com

Tài liệu tham khảo